11 класс, ВАРИАНТ 5

1. [3 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$

Ответ: $(9; -28)$.

Решение. Складывая и вычитая уравнения, получаем систему

$$\begin{cases} (4x + y) - 2\sqrt[3]{(y - 4x)(y + 4x)} = 24, \\ 4x - y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x + y) - 2\sqrt[3]{(-4^3)(y + 4x)} = 24, \\ y - 4x = -4^3, \end{cases}$$

равносильную исходной. Пусть $\sqrt[3]{4x + y} = t$. Тогда первое уравнение новой системы принимает вид $t^3 + 8t - 24 = 0$. Заметим, что функция $f(t) = t^3 + 8t - 24$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а $f(2) = 0$. Следовательно, $t = 2$ является единственным решением уравнения, а значит, $4x + y = 8$. В итоге получаем

$$\begin{cases} 4x + y = 8, \\ 4x - y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = -28. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство $\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{9}; 3^{-\frac{4}{3}}\right] \cup \{1\}$.

Решение. Переходя в обоих логарифмах к основанию 3, имеем

$$\sqrt{\frac{\log_3 (x^4)}{\log_3 (3x)}} \leqslant \frac{\log_3 \left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log_3 (9x)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4\log_3 x}{1 + \log_3 x}} \leqslant \frac{-2\log_3 x}{2 + \log_3 x}.$$

Обозначаем $\log_3 x = t$ и получаем

$$\sqrt{\frac{t}{1+t}} \leqslant -\frac{t}{2+t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2+t} \leqslant 0, \\ \frac{t}{1+t} \geqslant 0, \\ \frac{t}{1+t} \leqslant \frac{t^2}{(2+t)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2+t} \leqslant 0, \\ \frac{t}{1+t} \geqslant 0, \\ \frac{(3t+4)t}{(1+t)(2+t)^2} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-2; 0], \\ t \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty), \\ t \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{4}{3}\right] \cup (-1; 0], \end{cases}$$

откуда $t \in \left(-2; -\frac{4}{3}\right] \cup \{0\}$. Возвращаясь к переменной x, окончательно находим

$$\left[\begin{array}{l} -2 < \log_3 x \leqslant -\frac{4}{3}, \\ \log_3 x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{9} < x \leqslant 3^{-\frac{4}{3}}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

Ответ: 189.

Решение. Пусть искомое число есть $\overline{abcdefg}$ $(a \neq 0)$. Определим, какой может быть максимальная степень десятки, на которую происходит деление. Возможны несколько случаев:

- если максимальная степень десятки равна 4 или меньше, то сумма остатков меньше $10^4 + 10^3 + 10^2$, что меньше 12345.
- если максимальная степень десятки равна 7 или больше, то сумма остатков не меньше $a \cdot 10^6$, что больше 12345.

- Максимальная степень десятки равна 5 или 6. Эти случаи возможны.

1) Пусть максимальная степень десятки равна 5. Тогда остатки от деления на 10^5, 10^4, 10^3 равны соответственно $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$, $\overline{efg}$, и сумма остатков есть $c \cdot 10^4 + 2d \cdot 10^3 + 3S$, где $S = \overline{efg}, 0 \leqslant S < 1000$.

Рассмотрим уравнение $c \cdot 10^4 + 2d \cdot 10^3 + 3S = 12345$. Так как $12345 < 2 \cdot 10^4$, то либо $c = 0$, либо $c = 1$. Если $c = 0$, то $2d \cdot 10^3 + 3S = 12345$. $2d \cdot 10^3 = 12345 - 3S = 3(4115 - S)$. Поэтому $2d$ делится на 3. При этом $9 < 2d \leqslant 12$, так как $0 \leqslant S < 1000$. Поэтому $d = 6$, откуда $S = 115$. То есть число имеет вид $\overline{ab06115}$. Таких чисел 90.

Если $c = 1$, то $2d \cdot 10^3 + 3S = 2345$. $2d \cdot 10^3 = 2345 - 3 \cdot S$. Поэтому либо либо $d = 1$. Если $d = 0$, то $3S = 2345$, что невозможно. Если $d = 1$, то $3 \cdot S = 345$, откуда $S = 115$. То есть число имеет вид $\overline{ab11115}$. Таких чисел 90.

2) Пусть максимальная степень десятки равна 6. Тогда остатки от деления на 10^6, 10^5, 10^4 равны соответственно $\overline{bcdefg}$, $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$. И сумма остатков есть $b \cdot 10^5 + 2c \cdot 10^4 + 3S$, где $S = \overline{defg}, 0 \leqslant S < 10000$.

Рассмотрим уравнение $b \cdot 10^5 + 2c \cdot 10^4 + 3S = 12345$. Это равенство возможно только при $b = c = 0$. Значит, $3S = 12345$, откуда $S = 4115$, то есть число имеет вид $\overline{a004115}$. Таких чисел 9.

Значит, искомое количество семизначных чисел есть $90 + 90 + 9 = 189$.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

Ответ: $\angle ADC = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $\angle NQC = 90°$, $S_{NCDQ} = 60$.

Решение. Обозначим данный в условии угол NCP через ψ. Тогда $\angle CPD = \angle NCP = \psi$ (накрест лежащие при параллельных прямых); $\angle BPC = \angle CPD = \psi$ (окружность ω вписана в угол BPD и её центр C лежит на биссектрисе этого угла); $\angle NBP = \angle BCP + \angle BCP = 2\psi$ (теорема о внешнем угле треугольника); $\angle BPN = 90° - \angle BPC = 90° - \psi$; $\angle BNP = 180° - \angle BPN - \angle NBP = \psi$. Отсюда следует, что треугольники BPC и BPN равнобедренные и $NB = BP = BC$. Значит, $NB = BP = BC = \frac{13}{2}$.

Далее заметим, что $\angle BQP = \angle TBC = \angle PBC = \angle BPQ$ (здесь T – точка касания прямой BQ и окружности; первое и последнее равенства следуют из параллельности прямых BC и AD, а второе – из того, что окружность вписана в угол TBP). Выходит, что треугольник BPQ равнобедренный, и поэтому $BQ = BP = \frac{13}{2}$. Следовательно, в треугольнике NQC медиана QB равна половине стороны CN, к которой она проведена – значит, треугольник NQC прямоугольный, $\angle NQC = 90°$.

Из условия следует, что $ABCP$ – параллелограмм, откуда $\angle BAP = \angle BCP = \psi$. Кроме того, трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому $\angle ADC = \angle BAP = \psi = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$.

Пусть CH – высота трапеции. Рассматривая равнобедренные треугольники BCP и CPD, получаем $CP = 2BC \cos\psi$, $CH = CP \sin\psi = 2BC \sin\psi \cos\psi = \frac{2BC \sin\psi \cos\psi}{\cos^2\psi + \sin^2\psi} = \frac{2BC \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} = \frac{60}{13}$.

Из равенства треугольников BNQ и BPC (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $\angle BNQ = \psi$, поэтому четырёхугольник $NCDQ$ – параллелограмм ($NC \parallel DQ$, $\angle CNQ = \angle CDQ$) с основанием $CN = 13$. Его площадь равна $CN \cdot CH = 60$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases}\sin(x+y)=9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right),\\ \cos(x+2y)-\sqrt{3}\sin(x+2y)=-16\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Решение. Разделив обе части второго уравнения на 2 и вводя вспомогательный угол, получаем $\sin\frac{\pi}{6}\cos(x+2y)-\cos\frac{\pi}{6}\sin(x+2y)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Складываем это уравнение с первым из исходных уравнений и преобразуем:

$$\sin(x+y)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\sin(x+y)=2\sin(x+y)\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin(x+y)=2\sin(x+y)\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin(x+y)=0,\\ \cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Если $\sin(x+y)=0$, то первое из исходных уравнений даёт $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$ (здесь и далее в этой задаче $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$), $y=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Если $\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, то либо $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ (и тогда выражение $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y$ не определено), либо $y=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$. Подставляя в первое из данных в условии уравнений, имеем:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{9}{2}\cos x+\frac{9\sqrt{3}}{2}\sin x\Leftrightarrow-4\sqrt{3}\sin x=5\cos x.$$

Значит, $\operatorname{tg}x=-\frac{5}{4\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=-\frac{5}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2}\leqslant ax+b\leqslant-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ответ: $a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{25}{3}$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x)=-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$. График – парабола с ветвями вниз. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(-\frac{5}{2}\right)=5$, $h\left(\frac{7}{2}\right)=13$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{5}{2};5\right)$ и $N\left(\frac{7}{2};13\right)$ могут располагаться на прямой $y=ax+b$ или выше неё. Отсюда самое “высокое” расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y=\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – полуокружность $y=\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2}$ (так как при условии $y\geqslant0$ это уравнение эквивалентно следующему: $y^2=\frac{275}{4}+25x-x^2$, $\left(x-\frac{25}{2}\right)^2+y^2=15^2$ – это часть окружности с центром $F\left(\frac{25}{2};0\right)$ радиуса 15, лежащая в верхней полуплоскости $y\geqslant0$). Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $\left[-\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right]$. Действительно, система уравнений $\begin{cases}y=\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2},\\ y=\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}\end{cases}$ имеет единственное решение $x=\frac{1}{2}$, $y=9$, а этого достаточно, чтобы утверждать, что прямая и окружность касаются. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится выше полуокружности. Любая прямая, расположенная "ниже" прямой ℓ пересекается с полуокружностью, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{25}{3}$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

Ответ: $\angle BB_1C_1 = 2\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}} = \pi - \arccos\frac{1}{5}$, $V = 80$.

Решение. Пусть O – центр сферы S, а K – её точка касания с прямой C_1B_1. Плоскость A_1AD перпендикулярна AB, так как $AB \perp AD$ и $AB \perp AA_1$ (отсюда $\angle AD_1C_1 = 90^\circ$). Сфера S касается ABC в точке A, поэтому O лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через точку A. Так как плоскости A_1AD и ABC перпендикулярны, точка O лежит в плоскости AA_1D. Поскольку сфера S касается прямой C_1D_1, плоскости CDD_1 а её центр лежит в плоскости AA_1D, то точкой касания является D_1. По теореме о касательной и секущей $C_1K = C_1D_1 = \sqrt{C_1M \cdot C_1A} = \sqrt{3 \cdot 8}$. Из теоремы Пифагора для треугольника AD_1C_1 находим $AD_1 = \sqrt{AC_1^2 - C_1D_1^2} = \sqrt{8^2 - 24} = \sqrt{40}$.

Обозначим через K' проекцию точки K на плоскость AA_1D (точки A, O, K' лежат на одной прямой). Далее отметим, что $\angle BB_1C_1 = \angle(DD_1, DA) \overset{(*)}{=} \angle(D_1O, AO) = 180^\circ - \angle D_1OA = \angle AD_1O + \angle D_1AO \overset{(**)}{=} 2\angle D_1AO = 2\arcsin\frac{D_1K'}{AD_1} = 2\arcsin\frac{C_1K}{AD_1} = 2\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$. Равенство $(*)$ справедливо, поскольку $D_1O \perp DD_1$ и $AO \perp DA$, а равенство $(**)$ – так как $OD_1 = OA$ как радиусы сферы.

Пусть H – середина основания AD_1 равнобедренного треугольника ADD_1 ($DD_1 = DA$ по свойству касательных). Тогда $\angle ADH = \frac{1}{2}\angle ADD_1 = \arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$; $AD = \frac{AH}{\sin\angle ADH} = \frac{\sqrt{40}}{2} : \sqrt{\frac{3}{5}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$. Следовательно, объём параллелепипеда равен $AD \cdot C_1D_1 \cdot AK' = 5\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{40 - 24} = 80$.

11 класс, ВАРИАНТ 6

1. [3 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124, \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92. \end{cases}$

Ответ: $(112;-13)$.

Решение. Складывая и вычитая уравнения, получаем систему

$$\begin{cases} (x+8y)-2\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=32, \\ x-8y=216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8y)-2\sqrt[3]{(-6^3)(8y+x)}=32, \\ x-8y=6^3, \end{cases}$$

равносильную исходной. Пусть $\sqrt[3]{x+8y}=t$. Тогда первое уравнение новой системы принимает вид $t^3+12t-32=0$. Заметим, что функция $f(t)=t^3+12t-32$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а $f(2)=0$. Следовательно, $t=2$ является единственным решением уравнения, а значит, $x+8y=8$. В итоге получаем

$$\begin{cases} x+8y=8, \\ x-8y=216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=112, \\ y=-13. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство $\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \{1\}$.

Решение. Переходя в обоих логарифмах к основанию 2, имеем

$$\sqrt{\frac{\log_2\left(x^9\right)}{\log_2\left(2x^3\right)}} \leqslant \frac{\log_3\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\log_3(2x)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9\log_2 x}{1+3\log_2 x}} \leqslant \frac{-3\log_2 x}{1+\log_2 x}.$$

Обозначаем $\log_2 x=t$ и получаем

$$\sqrt{\frac{t}{1+3t}} \leqslant -\frac{t}{1+t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{1+t} \leqslant 0, \\ \frac{t}{1+3t} \geqslant 0, \\ \frac{t}{1+3t} \leqslant \frac{t^2}{(1+t)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{1+t} \leqslant 0, \\ \frac{t}{1+3t} \geqslant 0, \\ \frac{(t-1)t(2t+1)}{(1+3t)(1+t)^2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-1;0], \\ t \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup [0;+\infty), \\ t \in (-\infty;-1) \cup \left(-1;-\frac{1}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{3};0\right] \cup [1;+\infty), \end{cases}$$

откуда $t \in \left(-1;-\frac{1}{2}\right] \cup \{0\}$. Возвращаясь к переменной x, окончательно находим

$$\left[\begin{array}{l} -1<\log_2 x \leqslant -\frac{1}{2}, \\ \log_2 x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}<x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x=1. \end{array}\right.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

Ответ: 189.

Решение. Пусть искомое число есть $\overline{abcdefg}$ $(a \neq 0)$. Определим, какой может быть максимальная степень десятки, на которую происходит деление. Возможны несколько случаев:

- если максимальная степень десятки равна 4 или меньше, то сумма остатков меньше $10^4 + 10^3 + 10^2$, что меньше 12414.
- если максимальная степень десятки равна 7 или больше, то сумма остатков не меньше $a \cdot 10^6$, что больше 12414.
- Максимальная степень десятки равна 5 или 6. Эти случаи возможны.

1) Пусть максимальная степень десятки равна 5. Тогда остатки от деления на 10^5, 10^4, 10^3 равны соответственно $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$, $\overline{efg}$, и сумма остатков есть $c \cdot 10^4 + 2d \cdot 10^3 + 3S$, где $S = \overline{efg}, 0 \leqslant S < 1000$.

Рассмотрим уравнение $c \cdot 10^4 + 2d \cdot 10^3 + 3S = 12414$. Так как $12414 < 2 \cdot 10^4$, то либо $c = 0$, либо $c = 1$.

Если $c = 0$, то $2d \cdot 10^3 + 3S = 12345$. $2d \cdot 10^3 = 12414 - 3S = 3(4138 - S)$. Поэтому $2d$ делится на 3. При этом $9 < 2d \leqslant 12$, так как $0 \leqslant S < 1000$. Поэтому $d = 6$, откуда $S = 138$. То есть число имеет вид $\overline{ab06138}$. Таких чисел 90.

Если $c = 1$, то $2d \cdot 10^3 + 3S = 2414$. $2d \cdot 10^3 = 2414 - 3 \cdot S$. Поэтому либо $d = 0$, либо $d = 1$. Если $d = 0$, то $3S = 2414$, что невозможно. Если $d = 1$, то $3 \cdot S = 414$, откуда $S = 138$. То есть число имеет вид $\overline{ab11138}$. Таких чисел 90.

2) Пусть максимальная степень десятки равна 6. Тогда остатки от деления на 10^6, 10^5, 10^4 равны соответственно $\overline{bcdefg}$, $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$. И сумма остатков есть $b \cdot 10^5 + 2c \cdot 10^4 + 3S$, где $S = \overline{defg}, 0 \leqslant S < 10000$.

Рассмотрим уравнение $b \cdot 10^5 + 2c \cdot 10^4 + 3S = 12414$. Это равенство возможно только при $b = c = 0$. Значит, $3S = 12414$, откуда $S = 4138$, то есть число имеет вид $\overline{a004138}$. Таких чисел 9.

Значит, искомое количество семизначных чисел есть $90 + 90 + 9 = 189$.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arcctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

Ответ: $\angle ADC = \operatorname{arcctg} \frac{8}{15}$, $\angle NQC = 90°$, $S_{NCDQ} = 120$

Решение. Обозначим данный в условии угол NCP через ψ. Тогда $\angle CPD = \angle NCP = \psi$ (накрест лежащие при параллельных прямых); $\angle BPC = \angle CPD = \psi$ (окружность ω вписана в угол BPD и её центр C лежит на биссектрисе этого угла); $\angle NBP = \angle BCP + \angle BCP = 2\psi$ (теорема о внешнем угле треугольника); $\angle BPN = 90° - \angle BPC = 90° - \psi$; $\angle BNP = 180° - \angle BPN - \angle NBP = \psi$. Отсюда следует, что треугольники BPC и BPN равнобедренные и $NB = BP = BC$. Значит, $NB = BP = BC = 17$.

Далее заметим, что $\angle BQP = \angle TBC = \angle PBC = \angle BPQ$ (здесь T – точка касания прямой BQ и окружности; первое и последнее равенства следуют из параллельности прямых BC и AD, а второе – из того, что окружность вписана в угол TBP). Выходит, что треугольник BPQ равнобедренный, и поэтому $BQ = BP = 17$. Следовательно, в треугольнике NQC медиана QB равна половине стороны CN, к которой она проведена – значит, треугольник NQC прямоугольный, $\angle NQC = 90°$.

Из условия следует, что $ABCP$ – параллелограмм, откуда $\angle BAP = \angle BCP = \psi$. Кроме того, трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому $\angle ADC = \angle BAP = \psi = \operatorname{arcctg} \frac{8}{15}$.

Пусть CH – высота трапеции. Рассматривая равнобедренные треугольники BCP и CPD, получаем $CP = 2BC \cos\psi$, $CH = CP \sin\psi = 2BC \sin\psi \cos\psi = \frac{2BC \sin\psi \cos\psi}{\cos^2\psi + \sin^2\psi} = \frac{2BC \operatorname{ctg}\psi}{1+\operatorname{ctg}^2\psi} = \frac{120}{17}$.

Из равенства треугольников BNQ и BPC (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $\angle BNQ = \psi$, поэтому четырёхугольник $NCDQ$ – параллелограмм ($NC \parallel DQ$, $\angle CNQ = \angle CDQ$) с основанием $CN = 17$. Его площадь равна $CN \cdot CH = 120$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right), \\ \sin(x+2y)+\sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Решение. Разделив обе части второго уравнения на 2 и вводя вспомогательный угол, получаем $\sin\frac{\pi}{6}\sin(x+2y)+\cos\frac{\pi}{6}\cos(x+2y) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Вычитаем это уравнение из первого из исходных уравнений и преобразуем:

$$\sqrt{3}\cos(x+y)-\cos\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos(x+y) = 2\cos(x+y)\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(x+y) = 0, \\ \cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Если $\cos(x+y) = 0$, то первое из исходных уравнений даёт $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{3}+\pi k$ (здесь и далее в этой задаче $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$), $y = \frac{\pi}{6}+\pi n$, $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Если $\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то либо $y = 2\pi k$ (и тогда выражение $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$ не определено), либо $y = \frac{\pi}{3}+2\pi k$. Подставляя в первое из данных в условии уравнений, имеем:

$$\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{3}{2}\sin x = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x = 2\sqrt{3}\cos x.$$

Значит, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x-14}{2x-3} \leqslant ax+b \leqslant 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $a=-2$, $b=5$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$. График – полукружность с ветвями вниз. Действительно,

$$y = 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 = \frac{51}{4}-7x-x^2, \\ y-2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{7}{2}\right)^2+(y-2)^2 = 5^2, \\ y \geqslant 2. \end{cases}$$

На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$, $h\left(\frac{3}{2}\right) = 2$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{1}{2};6\right)$ и $N\left(\frac{3}{2};2\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax+b$ или выше неё. Отсюда самое "высокое" расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = -2x+5$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – гипербола $g(x) = \frac{12x-14}{2x-3}$. Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Действительно, уравнение $\frac{12x-14}{2x-3} = -2x+5$ имеет единственное решение $x = \frac{1}{2}$, и при этом $g'(x) = -\frac{8}{(2x-3)^2}$, $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -2$, т.е. угловой коэффициент прямой ℓ совпадает с производной функции $y = g(x)$ в их общей точке. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится выше гиперболы. Любая прямая, расположенная “ниже” прямой ℓ пересекается с гиперболой, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -2$, $b = 5$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

Ответ: $\angle NN_1M_1 = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}} = \arccos\frac{1}{5}$, $V = \frac{35\sqrt{21}}{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы S, а P – её точка касания с прямой M_1N_1. Плоскость K_1KL перпендикулярна LM, так как $LM \perp KL$ и $LM \perp LL_1$ (отсюда $\angle KL_1M_1 = 90°$). Сфера S касается KLM в точке K, поэтому O лежит на перпендикуляре к плоскости KLM, проходящем через точку K. Так как плоскости K_1KL и KLM перпендикулярны, точка O лежит в плоскости KK_1L. Поскольку сфера S касается прямой L_1M_1, плоскости LMM_1 а её центр лежит в плоскости KK_1L, то точкой касания является L_1. По теореме о касательной и секущей $M_1P = M_1L_1 = \sqrt{M_1A \cdot M_1K} = \sqrt{2 \cdot 7}$. Из теоремы Пифагора для треугольника KL_1M_1 находим $KL_1 = \sqrt{KM_1^2 - L_1M_1^2} = \sqrt{7^2 - 14} = \sqrt{35}$.

Обозначим через P' проекцию точки P на плоскость KK_1L (точки K, O, P' лежат на одной прямой). Далее отметим, что $\angle NN_1M_1 = \angle(LL_1, LK) \overset{(*)}{=} \angle(L_1O, KO) = 180° - \angle L_1OK = \angle KL_1O + \angle L_1KO \overset{(**)}{=} 2\angle L_1KO = 2\arcsin\frac{L_1P'}{KL_1} = 2\arcsin\frac{M_1P}{KL_1} = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$. Равенство $(*)$ справедливо, поскольку $L_1O \perp LL_1$ и $KO \perp KL$, а равенство $(**)$ – так как $OL_1 = OK$ как радиусы сферы.

Пусть H – середина основания KL_1 равнобедренного треугольника KLL_1 ($LL_1D = LK$ по свойству касательных). Тогда $\angle KLH = \frac{1}{2}\angle KLL_1 = \arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$; $KL = \frac{KH}{\sin\angle KLH} = \frac{\sqrt{35}}{2} : \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Следовательно, объём параллелепипеда равен $KL \cdot L_1M_1 \cdot KP' = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{35-14} = \frac{35\sqrt{21}}{2}$.

11 класс, ВАРИАНТ 7

1. [3 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=20, \\ y+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=-44. \end{cases}$

Ответ: $(4;-36)$.

Решение. Складывая и вычитая уравнения, получаем систему

$$\begin{cases} (7x+y)+2\sqrt[3]{(7x+y)(7x-y)}=-24, \\ 7x-y=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7x+y)+2\sqrt[3]{(4^3)(7x+y)}=-24, \\ 7x-y=4^3, \end{cases}$$

равносильную исходной. Пусть $\sqrt[3]{7x+y}=t$. Тогда первое уравнение новой системы принимает вид $t^3+8t+24=0$. Заметим, что функция $f(t)=t^3+8t+24$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а $f(-2)=0$. Следовательно, $t=-2$ является единственным решением уравнения, а значит, $7x+y=-8$. В итоге получаем

$$\begin{cases} 7x+y=-8, \\ 7x-y=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-36. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство $\sqrt{\log_{5x} x^4} \leqslant \log_{125x} \frac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{125}; 5^{-\frac{9}{5}}\right] \cup \{1\}$.

Решение. Переходя в обоих логарифмах к основанию 5, имеем

$$\sqrt{\frac{\log_5\left(x^4\right)}{\log_5\left(5x\right)}} \leqslant \frac{\log_5\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log_5(125x)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4\log_5 x}{1+\log_5 x}} \leqslant \frac{-2\log_5 x}{3+\log_5 x}.$$

Обозначаем $\log_5 x = t$ и получаем

$$\sqrt{\frac{t}{1+t}} \leqslant -\frac{t}{3+t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{3+t} \leqslant 0, \\ \frac{t}{1+t} \geqslant 0, \\ \frac{t}{1+t} \leqslant \frac{t^2}{(3+t)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{3+t} \leqslant 0, \\ \frac{t}{1+t} \geqslant 0, \\ \frac{(5t+9)t}{(1+t)(3+t)^2} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-3;0], \\ t \in (-\infty;-1) \cup [0;+\infty), \\ t \in (-\infty;-3) \cup \left(-3;-\frac{9}{5}\right] \cup (-1;0], \end{cases}$$

откуда $t \in \left(-3;-\frac{9}{5}\right] \cup \{0\}$. Возвращаясь к переменной x, окончательно находим

$$\left[\begin{array}{l} -3<\log_5 x \leqslant -\frac{9}{5}, \\ \log_5 x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{125}<x \leqslant 5^{-\frac{9}{5}}, \\ x=1. \end{array}\right.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

Ответ: 189.

Решение. Пусть искомое число есть $\overline{abcdefg}$ $(a \neq 0)$. Определим, какой может быть максимальная степень десятки, на которую происходит деление. Возможны несколько случаев:

- если максимальная степень десятки равна 4 или меньше, то сумма остатков меньше $10^4 + 10^3 + 10^2$, что меньше 12531.
- если максимальная степень десятки равна 7 или больше, то сумма остатков не меньше $a \cdot 10^6$, что больше 12531.
- Максимальная степень десятки равна 5 или 6. Эти случаи возможны.

1) Пусть максимальная степень десятки равна 5. Тогда остатки от деления на 10^5, 10^4, 10^3 равны соответственно $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$, $\overline{efg}$, и сумма остатков есть $c \cdot 10^4 + 2d \cdot 10^3 + 3S$, где $S = \overline{efg}, 0 \leqslant S < 1000$.

Рассмотрим уравнение $c \cdot 10^4 + 2d \cdot 10^3 + 3S = 12531$. Так как $12531 < 2 \cdot 10^4$, то либо $c = 0$, либо $c = 1$.

Если $c = 0$, то $2d \cdot 10^3 + 3S = 12531$. $2d \cdot 10^3 = 12531 - 3S = 3(4177 - S)$. Поэтому $2d$ делится на 3. При этом $9 < 2d \leqslant 12$, так как $0 \leqslant S < 1000$. Поэтому $d = 6$, откуда $S = 177$. То есть число имеет вид $\overline{ab}06177$. Таких чисел 90.

Если $c = 1$, то $2d \cdot 10^3 + 3S = 2531$. $2d \cdot 10^3 = 2531 - 3 \cdot S$. Поэтому либо $d = 0$, либо $d = 1$. Если $d = 0$, то $3S = 2531$, что невозможно. Если $d = 1$, то $3 \cdot S = 531$, откуда $S = 177$. То есть число имеет вид $\overline{ab}11177$. Таких чисел 90.

2) Пусть максимальная степень десятки равна 6. Тогда остатки от деления на 10^6, 10^5, 10^4 равны соответственно $\overline{bcdefg}$, $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$. И сумма остатков есть $b \cdot 10^5 + 2c \cdot 10^4 + 3S$, где $S = \overline{defg}, 0 \leqslant S < 10000$.

Рассмотрим уравнение $b \cdot 10^5 + 2c \cdot 10^4 + 3S = 12531$. Это равенство возможно только при $b = c = 0$. Значит, $3S = 12531$, откуда $S = 4177$, то есть число имеет вид $\overline{a}004177$. Таких чисел 9.

Значит, искомое количество семизначных чисел есть $90 + 90 + 9 = 189$.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arcctg} \frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$.

Ответ: $\angle ADC = \operatorname{arcctg} \frac{5}{12}$, $\angle NQC = 90^\circ$, $S_{NCDQ} = 240$

Решение. Обозначим данный в условии угол NCP через ψ. Тогда $\angle CPD = \angle NCP = \psi$ (накрест лежащие при параллельных прямых); $\angle BPC = \angle CPD = \psi$ (окружность ω вписана в угол BPD и её центр C лежит на биссектрисе этого угла); $\angle NBP = \angle BCP + \angle BCP = 2\psi$ (теорема о внешнем угле треугольника); $\angle BPN = 90^\circ - \angle BPC = 90^\circ - \psi$; $\angle BNP = 180^\circ - \angle BPN - \angle NBP = \psi$. Отсюда следует, что треугольники BPC и BPN равнобедренные и $NB = BP = BC$. Значит, $NB = BP = BC = 13$.

Далее заметим, что $\angle BQP = \angle TBC = \angle PBC = \angle BPQ$ (здесь T – точка касания прямой BQ и окружности; первое и последнее равенства следуют из параллельности прямых BC и AD, а второе – из того, что окружность вписана в угол TBP). Выходит, что треугольник BPQ равнобедренный, и поэтому $BQ = BP = 13$. Следовательно, в треугольнике NQC медиана QB равна половине стороны CN, к которой она проведена – значит, треугольник NQC прямоугольный, $\angle NQC = 90^\circ$.

Из условия следует, что $ABCP$ – параллелограмм, откуда $\angle BAP = \angle BCP = \psi$. Кроме того, трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому $\angle ADC = \angle BAP = \psi = \operatorname{arcctg} \frac{5}{12}$.

Пусть CH – высота трапеции. Рассматривая равнобедренные треугольники BCP и CPD, получаем $CP = 2BC \cos \psi$, $CH = CP \sin \psi = 2BC \sin \psi \cos \psi = \frac{2BC \sin \psi \cos \psi}{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi} = \frac{2BC \operatorname{ctg} \psi}{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi} = \frac{120}{13}$.

Из равенства треугольников BNQ и BPC (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $\angle BNQ = \psi$, поэтому четырёхугольник $NCDQ$ – параллелограмм ($NC \parallel DQ$, $\angle CNQ = \angle CDQ$) с основанием $CN = 26$. Его площадь равна $CN \cdot CH = 240$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

Ответ: $\frac{1}{5\sqrt{3}}$ или $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Решение. Разделив обе части второго уравнения на 2 и вводя вспомогательный угол, получаем $\sin\frac{\pi}{6}\cos(x-2y) - \cos\frac{\pi}{6}\sin(x-2y) = 10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x + 2y\right) = 10\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Складываем это уравнение с первым из исходных уравнений и преобразуем:

$$\sin(x-y) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x + 2y\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin(x-y) = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - 2y - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-y) = 2\sin(x-y)\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x-y) = 0, \\ \cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Если $\sin(x-y)=0$, то первое из исходных уравнений даёт $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$, откуда $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$ (здесь и далее в этой задаче $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$), $y = \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Если $\cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, то либо $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (и тогда выражение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ не определено), либо $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Подставляя в первое из данных в условии уравнений, имеем:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -9\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = -\frac{9}{2}\cos x - \frac{9\sqrt{3}}{2}\sin x \Leftrightarrow 5\sqrt{3}\sin x = -4\cos x.$$

Значит, $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{5\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -\frac{4}{5\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}}$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

Ответ: $a = -1$, $b = \frac{15}{2}$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$. График – парабола с ветвями вниз. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(\frac{1}{2}\right) = 7$, $h\left(\frac{9}{2}\right) = 3$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(\frac{1}{2}; 7\right)$ и $N\left(\frac{9}{2}; 3\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax+b$ или выше неё. Отсюда самое “высокое” расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = -x + \frac{15}{2}$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – полуокружность $y = \sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2}$ (так как при условии $y \geqslant 0$ это уравнение эквивалентно следующему: $y^2 = \frac{175}{4} - 5x - x^2$, $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 50$ – это часть окружности с центром $F\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$ радиуса $\sqrt{50}$, лежащая в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$). Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $\left[\frac{1}{2}; -\frac{9}{2}\right]$. Действительно, система уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2}, \\ y = -x + \frac{15}{2} \end{cases}$ имеет единственное решение $x = \frac{5}{2}$, $y = 5$, а этого достаточно, чтобы утверждать, что прямая и окружность касаются. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится выше полуокружности. Любая прямая, расположенная “ниже” прямой ℓ пересекается с полуокружностью, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -1$, $b = \frac{15}{2}$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых C_1D_1 и CC_1, плоскости BB_1C_1, а также плоскости ABB_1 в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle ABC$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 3$, $C_1M = 2$.

Ответ: $\angle ABC = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} = \pi - \arccos\frac{1}{3}$, $V = \frac{15\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы S, а K – её точка касания с прямой C_1D_1. Плоскость ABC перпендикулярна BB_1, так как $AB \perp BB_1$ и $BC \perp BB_1$ (отсюда $\angle ACC_1 = 90°$). Сфера S касается ABB_1 в точке A, поэтому O лежит на перпендикуляре к плоскости ABB_1, проходящем через точку A. Так как плоскости ABB_1 и ABC перпендикулярны, точка O лежит в плоскости ABC. Поскольку сфера S касается прямой CC_1, плоскости BB_1C_1 а её центр лежит в плоскости ABC, то точкой касания является C. По теореме о касательной и секущей $C_1C = C_1K = \sqrt{C_1M \cdot C_1A} = \sqrt{2 \cdot 5}$. Из теоремы Пифагора для треугольника ACC_1 находим $AC = \sqrt{AC_1^2 - CC_1^2} = \sqrt{5^2 - 10} = \sqrt{15}$.

Обозначим через K' проекцию точки K на плоскость ABC (точки A, O, K' лежат на одной прямой). Далее отметим, что $\angle ABC \overset{(*)}{=} 180° - \angle COA = \angle ACO + \angle CAO \overset{(**)}{=} 2\angle CAO = 2\arcsin\frac{CK'}{AC} = 2\arcsin\frac{C_1K}{AC} = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. Равенство $(*)$ справедливо, поскольку $CO \perp BC$ и $AO \perp AB$, а равенство $(**)$ – так как $OC = OA$ как радиусы сферы.

Пусть H – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC ($BC = BA$ по свойству касательных). Тогда $\angle ABH = \frac{1}{2}\angle ABC = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$; $AB = \frac{AH}{\sin\angle ABH} = \frac{\sqrt{15}}{2} : \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Следовательно, объём параллелепипеда равен $AB \cdot CC_1 \cdot AK' = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15 - 10} = \frac{15\sqrt{5}}{2}$.

11 класс, ВАРИАНТ 8

1. [3 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$

Ответ: $(8; -112)$.

Решение. Складывая и вычитая уравнения, получаем систему

$$\begin{cases} (13x + y) + 2\sqrt[3]{(13x - y)(13x + y)} = -32, \\ 13x - y = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (13x + y) + 2\sqrt[3]{(6^3)(13x + y)} = -32, \\ 13x - y = 6^3, \end{cases}$$

равносильную исходной. Пусть $\sqrt[3]{13x + y} = t$. Тогда первое уравнение новой системы принимает вид $t^3 + 12t + 32 = 0$. Заметим, что функция $f(t) = t^3 + 12t + 32$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а $f(-2) = 0$. Следовательно, $t = -2$ является единственным решением уравнения, а значит, $13x + y = -8$. В итоге получаем

$$\begin{cases} 13x + y = -8, \\ 13x - y = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = -112. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство $\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$.

Ответ: $\left(3^{-\frac{2}{3}}; 3^{-\frac{4}{7}}\right] \cup \{1\}$.

Решение. Переходя в обоих логарифмах к основанию 3, имеем

$$\sqrt{\frac{\log_3(x^9)}{\log_3(3x^2)}} \leqslant \frac{\log_3\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\log_3(9x^3)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9\log_3 x}{1 + 2\log_3 x}} \leqslant \frac{-3\log_3 x}{2 + 3\log_3 x}.$$

Обозначаем $\log_3 x = t$ и получаем

$$\sqrt{\frac{t}{1+2t}} \leqslant -\frac{t}{2+3t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2+3t} \leqslant 0, \\ \frac{t}{1+2t} \geqslant 0, \\ \frac{t}{1+2t} \leqslant \frac{t^2}{(2+3t)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2+3t} \leqslant 0, \\ \frac{t}{1+2t} \geqslant 0, \\ \frac{(t+1)t(7t+4)}{(1+2t)(2+3t)^2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right], \\ t \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [0; +\infty), \\ t \in \left[-1; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{7}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right]), \end{cases}$$

откуда $t \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{7}\right] \cup \{0\}$. Возвращаясь к переменной x, окончательно находим

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{2}{3} < \log_3 x \leqslant -\frac{4}{7}, \\ \log_3 x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{-\frac{2}{3}} < x \leqslant 3^{-\frac{4}{7}}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

Ответ: 189.

Решение. Пусть искомое число есть $\overline{abcdefg}$ $(a \neq 0)$. Определим, какой может быть максимальная степень десятки, на которую происходит деление. Возможны несколько случаев:

- если максимальная степень десятки равна 4 или меньше, то сумма остатков меньше $10^4 + 10^3 + 10^2$, что меньше 12828.
- если максимальная степень десятки равна 7 или больше, то сумма остатков не меньше $a \cdot 10^6$, что больше 12828.
- Максимальная степень десятки равна 5 или 6. Эти случаи возможны.

1) Пусть максимальная степень десятки равна 5. Тогда остатки от деления на 10^5, 10^4, 10^3 равны соответственно $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$, $\overline{efg}$, и сумма остатков есть $c \cdot 10^4 + 2d \cdot 10^3 + 3S$, где $S = \overline{efg}, 0 \leqslant S < 1000$.

Рассмотрим уравнение $c \cdot 10^4 + 2d \cdot 10^3 + 3S = 12828$. Так как $12828 < 2 \cdot 10^4$, то либо $c = 0$, либо $c = 1$.

Если $c = 0$, то $2d \cdot 10^3 + 3S = 12828$. $2d \cdot 10^3 = 12828 - 3S = 3(4276 - S)$. Поэтому $2d$ делится на 3. При этом $9 < 2d \leqslant 12$, так как $0 \leqslant S < 1000$. Поэтому $d = 6$, откуда $S = 276$. То есть число имеет вид $\overline{ab06276}$. Таких чисел 90.

Если $c = 1$, то $2d \cdot 10^3 + 3S = 2828$. $2d \cdot 10^3 = 2828 - 3 \cdot S$. Поэтому либо $d = 0$, либо $d = 1$. Если $d = 0$, то $3S = 2828$, что невозможно. Если $d = 1$, то $3 \cdot S = 828$, откуда $S = 276$. То есть число имеет вид $\overline{ab11276}$. Таких чисел 90.

2) Пусть максимальная степень десятки равна 6. Тогда остатки от деления на 10^6, 10^5, 10^4 равны соответственно $\overline{bcdefg}$, $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$. И сумма остатков есть $b \cdot 10^5 + 2c \cdot 10^4 + 3S$, где $S = \overline{defg}, 0 \leqslant S < 10000$.

Рассмотрим уравнение $b \cdot 10^5 + 2c \cdot 10^4 + 3S = 12828$. Это равенство возможно только при $b = c = 0$. Значит, $3S = 12828$, откуда $S = 4276$, то есть число имеет вид $\overline{a004276}$. Таких чисел 9.

Значит, искомое количество семизначных чисел есть $90 + 90 + 9 = 189$.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

Ответ: $\angle ADC = \operatorname{arctg} \frac{15}{8}$, $\angle NQC = \frac{\pi}{2}$, $S_{NCDQ} = 480$.

Решение. Обозначим данный в условии угол NCP через ψ. Тогда $\angle CPD = \angle NCP = \psi$ (накрест лежащие при параллельных прямых); $\angle BPC = \angle CPD = \psi$ (окружность ω вписана в угол BPD и её центр C лежит на биссектрисе этого угла); $\angle NBP = \angle BCP + \angle BCP = 2\psi$ (теорема о внешнем угле треугольника); $\angle BPN = 90^\circ - \angle BPC = 90^\circ - \psi$; $\angle BNP = 180^\circ - \angle BPN - \angle NBP = \psi$. Отсюда следует, что треугольники BPC и BPN равнобедренные и $NB = BP = BC$. Значит, $NB = BP = BC = 17$.

Далее заметим, что $\angle BQP = \angle TBC = \angle PBC = \angle BPQ$ (здесь T – точка касания прямой BQ и окружности; первое и последнее равенства следуют из параллельности прямых BC и AD, а второе – из того, что окружность вписана в угол TBP). Выходит, что треугольник BPQ равнобедренный, и поэтому $BQ = BP = 17$. Следовательно, в треугольнике NQC медиана QB равна половине стороны CN, к которой она проведена – значит, треугольник NQC прямоугольный, $\angle NQC = 90^\circ$.

Из условия следует, что $ABCP$ – параллелограмм, откуда $\angle BAP = \angle BCP = \psi$. Кроме того, трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому $\angle ADC = \angle BAP = \psi = \operatorname{arctg} \frac{15}{8}$.

Пусть CH – высота трапеции. Рассматривая равнобедренные треугольники BCP и CPD, получаем $CP = 2BC \cos\psi$, $CH = CP \sin\psi = 2BC \sin\psi \cos\psi = \frac{2BC \sin\psi \cos\psi}{\cos^2\psi + \sin^2\psi} = \frac{2BC \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} = \frac{240}{17}$.

Из равенства треугольников BNQ и BPC (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $\angle BNQ = \psi$, поэтому четырёхугольник $NCDQ$ – параллелограмм ($NC \parallel DQ$, $\angle CNQ = \angle CDQ$) с основанием $CN = 34$. Его площадь равна $CN \cdot CH = 480$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right), \\ \cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

Ответ: $\frac{5}{3\sqrt{3}}$ или $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Решение. Разделив обе части второго уравнения на 2 и вводя вспомогательный угол, получаем $\cos\frac{\pi}{3}\cos(2x-y)+\sin\frac{\pi}{3}\sin(2x-y) = 6\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x-y-\frac{\pi}{3}\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)$. Складываем это уравнение с первым из исходных уравнений и преобразуем:

$$\sqrt{3}\cos(x-y)+\cos\left(2x-y-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos(x-y) = 2\cos(x-y)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(x-y)=0, \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Если $\cos(x-y)=0$, то первое из исходных уравнений даёт $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right)=0$, откуда $y = -\frac{\pi}{6}+\pi k$ (здесь и далее в этой задаче $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$), $x = \frac{\pi}{3}+\pi n$, $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Если $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то либо $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$ (и тогда выражение $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$ не определено), либо $x = \frac{7\pi}{6}+2\pi k$. Подставляя в первое из данных в условии уравнений, имеем:

$$\sqrt{3}\cos\left(\frac{7\pi}{6}-y\right) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y = -\frac{7}{2}\cos y - \frac{7\sqrt{3}}{2}\sin y \Leftrightarrow -3\sqrt{3}\sin y = 2\cos y.$$

Значит, $\operatorname{tg} y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax+b \leqslant 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{29}{8}$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$. График – полукружность с ветвями вниз. Действительно,

$$y = 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = -\frac{33}{4}-13x-x^2, \\ y-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{13}{2}\right)^2+(y-2)^2 = 34, \\ y \geqslant 1. \end{cases}$$

На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(-\frac{19}{2}\right) = 6$, $h\left(-\frac{3}{2}\right) = 4$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{19}{2};6\right)$ и $N\left(-\frac{3}{2};4\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или выше неё. Отсюда самое "высокое" расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN. Составляя её уравнение по двум точкам, имеем $y = -\frac{1}{4}x + \frac{29}{8}$ (назовём эту прямую ℓ).

График левой части неравенства – гипербола $g(x) = \frac{12x+26}{2x+3}$. Заметим, что она касается прямой ℓ в точке, принадлежащей промежутку $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Действительно, уравнение $\frac{12x+26}{2x+3} = -\frac{1}{4}x + \frac{29}{8}$ имеет единственное решение $x = -\frac{11}{2}$, и при этом $g'(x) = -\frac{16}{(2x+3)^2}$, $g'\left(-\frac{11}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, т.е. угловой коэффициент прямой ℓ совпадает с производной функции $y = g(x)$ в их общей точке. Несложно видеть (если построить график), что на данном промежутке прямая ℓ находится выше гиперболы. Любая прямая, расположенная "ниже" прямой ℓ пересекается с гиперболой, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, ℓ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{29}{8}$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

Ответ: $\angle KK_1N_1 = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos\frac{1}{3}$, $V = 12\sqrt{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы S, а P – её точка касания с прямой MM_1. Плоскость KK_1N перпендикулярна K_1L_1, так как $K_1L_1 \perp KK_1$ и $K_1L_1 \perp K_1N_1$ (отсюда $\angle KN_1M_1 = 90°$). Сфера S касается KK_1L в точке K, поэтому O лежит на перпендикуляре к плоскости KK_1L, проходящем через точку K. Так как плоскости K_1KL и KK_1N перпендикулярны, точка O лежит в плоскости KK_1N. Поскольку сфера S касается прямой N_1M_1, плоскости $K_1L_1M_1$ а её центр лежит в плоскости KK_1N, то точкой касания является N_1. По теореме о касательной и секущей $M_1N_1 = M_1P = \sqrt{M_1A \cdot M_1K} = 2$. Из теоремы Пифагора для треугольника KM_1N_1 находим $KN_1 = \sqrt{KM_1^2 - N_1M_1^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$.

Обозначим через P' проекцию точки P на плоскость KK_1N_1 (точки K, O, P' лежат на одной прямой). Далее отметим, что $\angle KK_1N_1 \overset{(*)}{=} 180° - \angle N_1OK = \angle KN_1O + \angle N_1KO \overset{(**)}{=} 2\angle N_1KO = 2\arcsin\frac{N_1P'}{KN_1} = 2\arcsin\frac{M_1P}{KN_1} = 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}$. Равенство $(*)$ справедливо, поскольку $N_1O \perp N_1K_1$ и $KO \perp KK_1$, а равенство $(**)$ – так как $ON_1 = OK$ как радиусы сферы.

Пусть H – середина основания KN_1 равнобедренного треугольника KK_1N_1 ($K_1N_1 = K_1K$ по свойству касательных). Тогда $\angle KK_1H = \frac{1}{2}\angle KK_1N_1 = \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}$; $KK_1 = \frac{KH}{\sin\angle KK_1H} = \frac{\sqrt{12}}{2} : \sqrt{\frac{1}{3}} = 3$. Следовательно, объём параллелепипеда равен $KK_1 \cdot N_1M_1 \cdot KP' = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{12 - 4} = 12\sqrt{2}$.